

Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.

Studiengang	Semesterzahl

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind 4 Blätter mit eigenen Aufzeichnungen erlaubt. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig; insbesondere ist die Verwendung eines Taschenrechners, eines Smartphones oder anderer elektronischer Geräte nicht gestattet.
- Füllen Sie den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend zwei Aufgabenblätter. Geben Sie die Lösung zu Aufgabe 1 direkt auf dem ersten Aufgabenblatt an. Bei Aufgabe 1 werden **ausschließlich** die auf dem Aufgabenblatt notierten Endergebnisse bewertet. Die Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 sind auf einseitig zu beschreibenden eigenen DIN A4-Blättern anzufertigen. Der vollständige Lösungsweg zu den Aufgaben 2 bis 6 einschließlich eventueller Nebenrechnungen ist schriftlich festzuhalten, die bloße Angabe des Ergebnisses zählt nicht als Lösung.
- Für jede der Aufgaben 2 bis 6 ist ein neues Blatt anzufangen. Kennzeichnen Sie alle Blätter einschließlich der Aufgabenblätter mit Ihrem Namen. Nummerieren Sie die Blätter fortlaufend durch. Schreiben Sie weder in Rot noch mit Bleistift.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

Modulprüfung Mathematik 2

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die fehlenden Zahlen und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

z	\bar{z}	$\frac{1}{z}$	$ z $	$\varphi = \arg(z)$	z^9
	$1 + j$				
			3	$\frac{\pi}{2}$	$19683 j$

- (b) A sei eine reelle $n \times n$ Matrix A , die einen Eigenwert 0 besitzt. U sei der Eigenraum zu diesem Eigenwert. $f(x) = A \cdot x$ sei die zugehörige lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ Der Kern von f ist gleich U .
- ☐ Das Bild von f ist gleich U .
- ☐ Der Rang von A ist gleich n .
- ☐ A ist eine orthogonale Matrix.
- ☐ A ist singulär.
- ☐ A ist invertierbar.

- (c) Seien f und g differenzierbare Funktionen von $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} und $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Welche der folgenden Aussagen bzw. Regeln sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$
- ☐ $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$
- ☐ $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ☐ $\int_a^b f(cx) dx = c \int_a^b f(x) dx$
- ☐ $\int_a^b f(x) dx > 0$ und entspricht der Fläche zwischen dem Graph von f und der x -Achse.
- ☐ Die Ableitung von $h(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist $f(x)$ auf dem Intervall $]a, b[$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

$$(a) \int_1^{16} x^{-\frac{3}{4}} dx \qquad (b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung von (b) eine Substitution der Form $z(x) = \text{„Winkelfunktion}(x)\text{“}$.

Aufgabe 3 Gegeben seien eine Differentialgleichung und eine Anfangswertproblem:

$$(DGL) \quad \frac{3x^2 y^2(x)}{y'(x)} - 1 = 0 \qquad (AWP) \quad y(0) = \frac{1}{27}$$

- (a) Formen Sie die DGL in die Standard-Form um.
- (b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL durch Trennung der Variablen.
- (c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der DGL zum AWP.

Aufgabe 4 Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^2 z \\ z^2 x \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie $\text{rot } \vec{F}$.
- (b) Berechnen Sie $\text{div } \vec{F}$.

Aufgabe 5 Die folgende Matrix A über dem Körper $GF(2)$ sei gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie den Rang von A über $GF(2)$.
- (b) Sind die vier Spaltenvektoren von A linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 Die Standardbasis des \mathbb{R}^2 ist $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Durch Drehung von B_1 um den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ erhält man eine Basis B_2 .

- (a) Geben Sie B_2 explizit an und skizzieren Sie B_1 und B_2 .
- (b) Seien $(2, 4)$ die Koordinaten von v bezüglich B_1 . Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich B_2 .
- (c) Seien $(-2, 2)$ die Koordinaten von w bezüglich B_2 . Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich B_1 .