

Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.
Studiengang	Semesterzahl	

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind 4 Blätter mit eigenen Aufzeichnungen erlaubt. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig; insbesondere ist die Verwendung eines Taschenrechners oder anderer elektronischer Geräte nicht gestattet.
- Füllen Sie den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend drei Aufgabenblätter. Geben Sie die Lösung zu Aufgabe 1 direkt auf den ersten beiden Aufgabenblättern an. Die Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 sind auf einseitig zu beschreibenden eigenen DIN A4-Blättern anzufertigen. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen. Kennzeichnen Sie alle Blätter einschließlich des ersten Aufgabenblatts mit Ihrem Namen. Nummerieren Sie die Blätter fortlaufend durch. Schreiben Sie weder in Rot noch mit Bleistift.
- Der vollständige Lösungsweg zu den Aufgaben 2 bis 6 einschließlich eventueller Nebenrechnungen ist schriftlich festzuhalten, die bloße Angabe des Ergebnisses zählt nicht als Lösung.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

Modulprüfung Mathematik 2

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die fehlenden Einträge in folgender Tabelle:

z	z^*	$\frac{1}{z}$	$r = z $	$\varphi = \arg(z)$
	$-2 - 2j$			
			3	$-\frac{\pi}{2}$

- (b) Welche Eigenschaften besitzt die folgende Differentialgleichung:
(Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

$$(y(x))^2 y'(x) - 3x^2 = 0$$

- ☐ Die DGL ist homogen.
- ☐ Die DGL ist nicht-linear.
- ☐ Die DGL besitzt getrennte Variablen.
- ☐ Eine Lösung der DGL ist gegeben durch $y(x) = -e^x$.
- ☐ Die DGL hat die Ordnung 2.

- (c) Welche Eigenschaften besitzt die folgende Differentialgleichung:
(Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

$$2y''(x) + y'(x) + 6y(x) = y''(x) - 3y'(x) - 5y(x)$$

- ☐ Die DGL ist homogen.
- ☐ Die DGL ist nicht-linear.
- ☐ Die DGL hat die Ordnung 2.
- ☐ Die DGL besitzt die Störfunktion $2y''(x)$.
- ☐ Eine Lösungen der charakteristischen Gleichung sind rein reell.

- (d) Welche Eigenschaften besitzt die folgende Differentialgleichung:
(Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

$$y'(x) + 6y(x) - \sin(x) = -y'(x)$$

- ☐ Die DGL ist nicht-linear.
- ☐ Die DGL besitzt die Störfunktion $\sin(x)$.
- ☐ Ein Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL ist gegeben durch $\sigma(x) = A_0 \cos(x) + B_0 \sin(x)$.
- ☐ Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist gegeben durch "Konstante mal Exponentialfunktion von einer Zahl mal x ".
- ☐ Die zugehörige charakteristische Gleichung ist gegeben durch $\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$.

- (e) Welche Aussagen treffen zu über die folgende reelle Matrix M ?

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ 0 ist Eigenwert von M .
- ☐ M ist regulär.
- ☐ Der Rang von M ist gleich 1.
- ☐ Der Rang von M ist gleich 2.
- ☐ M ist eine orthogonale Matrix.

Aufgabe 2 Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$\int_1^{27} x^{-\frac{4}{3}} dx$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie das Grundintegral durch *Substitution* von $\ln(x)$:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie das Grundintegral durch *partielle Integration*:

$$\int x \arctan(x) dx$$

Hinweis: Die Ableitung von $\arctan(x)$ ist gleich $\frac{1}{1+x^2}$ und durch $f = \frac{x^2+1}{2}$ erhält man einen günstigen Ansatz.

Aufgabe 5 Gegeben sei ein Vektorfeld \vec{K} von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 mit den Komponentenfunktionen K_1 , K_2 und K_3 :

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zy \\ zx \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie die Gradienten $\text{grad } K_1$, $\text{grad } K_2$ und $\text{grad } K_3$.
- (b) Berechnen Sie die Divergenz $\text{div } \vec{K}$.

Aufgabe 6 Die folgende reelle Matrix A sei gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A .
- (b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.
- (c) Geben Sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren von A an.