

Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.
Studiengang	Semesterzahl	

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind *erlaubt*: eigene Aufzeichnungen im Umfang von *vier* DIN A4-Blättern, *zweiseitig* beschrieben.
- Weitere Hilfsmittel sind *untersagt*; insbesondere ist die Verwendung von Taschenrechnern, Smartphones oder anderen elektronischen Geräte *untersagt*.
- Schreiben Sie *nicht* mit Rot und *nicht* mit Bleistift.
- Füllen Sie als Erstes den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend 2 Aufgabenblätter. Die Zeit läuft erst, nachdem die Aufgabenblätter verteilt sind.
- Geben Sie die Lösungen zu Aufgabe 1 direkt auf dem ersten Aufgabenblatt an; entsprechende Nebenrechnungen können Sie auf mitgebrachten DIN A4-Blättern durchführen.
- Ansätze, Zeichnungen, Rechenwege und Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 schreiben Sie auf mitgebrachte DIN A4-Blätter. Lösungen ohne Rechenweg sind hier *nicht* ausreichend!
- Bitte notieren Sie oben auf jedem der Blätter Ihren Namen.
- Bitte notieren Sie die jeweiligen Nummern der Aufgaben zu den entsprechenden Lösungswegen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

Modulprüfung Mathematik 2

Aufgabe 1

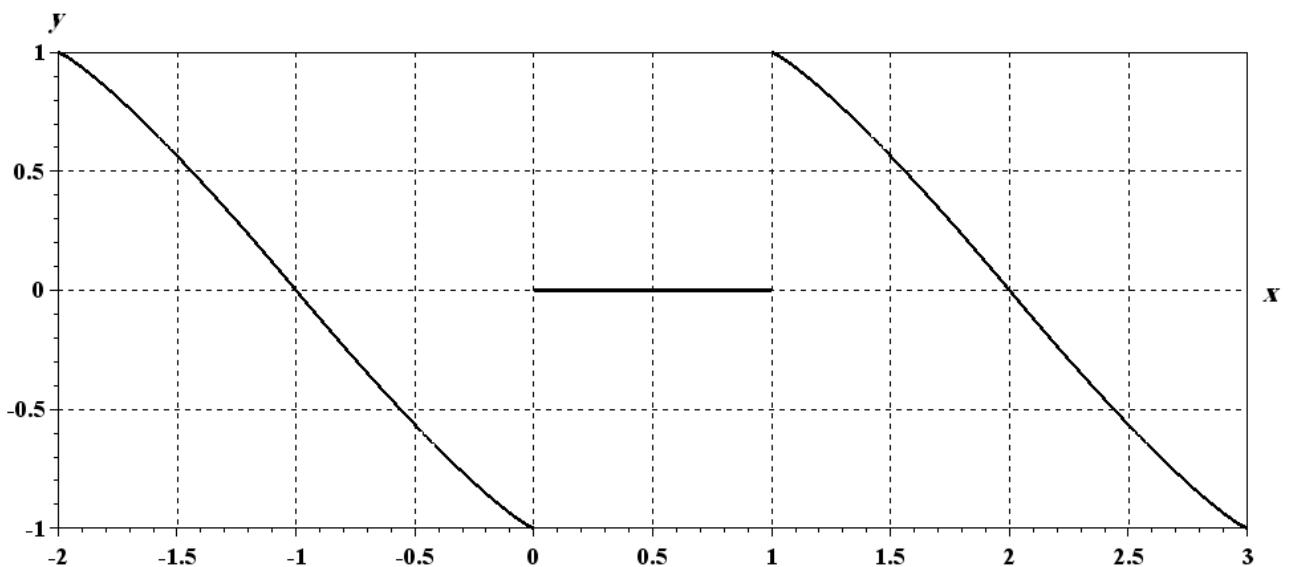
(a) Rechnen Sie die komplexen Zahlen in Normalform $z = a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ um:

$$(1 + j)^{-2} = \qquad \qquad \qquad \sqrt{2} e^{-j\frac{3\pi}{4}} =$$

(b) Rechnen Sie die komplexen Zahlen in Polarform $z = r e^{j\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in]-\pi; \pi]$ um:

$$(3 - 2j)(3 + 2j) = \qquad \qquad \qquad \frac{\sqrt{3} + j}{j} =$$

(c) Der Verlauf einer Funktion f im Intervall $[-2; 3]$ ist durch den Graph von f bekannt:



Schätzen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe des Graphen von f grob ab:

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx \approx$$

$$\int_{-0.5}^{+0.5} f(x) dx \approx$$

$$\int_{0.5}^{2.5} f(x) dx \approx$$

Aufgabe 2 Gegeben ist ein bestimmtes Integral mit Lösung:

$$\int_a^b x e^{-x^2} dx = \frac{e^{-a^2} - e^{-b^2}}{2}.$$

Finden Sie den Lösungsweg unter Verwendung von Substitution.

Aufgabe 3 Gegeben ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

Untersuchen Sie den Ausdruck auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Nutzen Sie Informationen aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4 Gegeben sind eine Differentialgleichung und ein Anfangswertproblem:

$$(\text{DGL}) \quad y'(x)y(x) + \sin(x) = 0 \qquad (\text{AWP}) \quad y(0) = -2$$

- (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL durch Trennung der Variablen.
- (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der DGL zum AWP.

Aufgabe 5 Gegeben ist eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$.
- (b) Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist.
- (c) Berechnen Sie den Eigenraum V_0 zum Eigenwert $\lambda = 0$.
- (d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Eigenraum V_0 und dem Kern(A)?
- (e) Sei B eine beliebige quadratische Matrix mit $\text{Kern}(B) = \vec{0}$. Kann in diesem Fall B einen Eigenwert $\lambda = 0$ besitzen? Argumentieren Sie mit Hilfe der Eigenwertgleichung $B\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Aufgabe 6 Gegeben ist eine Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

- (a) Berechnen Sie $\text{grad}(f)$.
- (b) Berechnen Sie $\text{div}(\text{grad}(f))$.
- (c) $\text{div}(\text{grad}(f))$ ist hier eine lineare Abbildung. Geben Sie die zugehörige Matrix an.