

Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.

Studiengang	Semesterzahl

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind *erlaubt*: eigene Aufzeichnungen im Umfang von *vier* DIN A4-Blättern, *zweiseitig* beschrieben.
- Weitere Hilfsmittel sind *untersagt*; insbesondere ist die Verwendung von Taschenrechnern, Smartphones oder anderen elektronischen Geräten *untersagt*.
- Schreiben Sie *nicht* mit Rot und *nicht* mit Bleistift.
- Füllen Sie als Erstes den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend 2 Aufgabenblätter. Die Zeit läuft erst, nachdem die Aufgabenblätter verteilt sind.
- Geben Sie die Lösungen zu Aufgabe 1 direkt auf dem ersten Aufgabenblatt an; entsprechende Nebenrechnungen können Sie auf mitgebrachten DIN A4-Blättern durchführen.
- Ansätze, Zeichnungen, Rechenwege und Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 schreiben Sie auf mitgebrachte DIN A4-Blätter. Lösungen ohne Rechenweg sind hier *nicht* ausreichend!
- Bitte notieren Sie oben auf jedem der Blätter Ihren Namen.
- Bitte notieren Sie die jeweiligen Nummern der Aufgaben zu den entsprechenden Lösungswegen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

Modulprüfung Mathematik 2

Aufgabe 1

(a) Rechnen Sie die komplexen Zahlen in Normalform $z = a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ um:

$$\sqrt{3} e^{j\frac{5\pi}{3}} = \frac{2j - 4}{j - 1} =$$

(b) Rechnen Sie die komplexen Zahlen in Polarform $z = r e^{j\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in]-\pi; \pi]$ um:

$$(-j - 1)^3 = -e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} =$$

(c) Gegeben sind Funktionen

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(yz) - \sin(x) \\ \cos(zx) - \sin(y) \\ \cos(xy) - \sin(z) \end{pmatrix};$$

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = -(\cos(x) + \cos(y) + \cos(z)).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ Es gilt $\operatorname{div} \vec{F} = G$.
- ☐ $\operatorname{grad} \vec{F}$ ist auf dem ganzen \mathbb{R}^3 definiert.
- ☐ $\operatorname{div} F_3$ ist ein Vektorfeld mit Unstetigkeitsstellen.
- ☐ Die y -Komponente von $\operatorname{rot} \vec{F}$ ist gegeben durch $y(\sin(xy) - \sin(yz))$.
- ☐ $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ ist eine Funktion, die von genau zwei Variablen abhängt.
- ☐ $\operatorname{rot} G$ ist ein Skalarfeld.
- ☐ Es gilt $\operatorname{div} \vec{F} = yz \cos(x) - zx \sin(y)$.
- ☐ $\operatorname{grad} G$ wird in jeder Komponenten durch die Sinus-Funktion definiert.

(d) Bringen Sie die Differentialgleichung

$$y(x) = \frac{3x^4 - 4y''(x) + \sin(x) + y'(x)}{5}$$

in Standardform:

Aufgabe 2 Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$\int_1^{32} \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} dx$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie das Grundintegral:

$$\int \frac{1 - \ln(x)}{2x} dx$$

Hinweis: Verwenden Sie Substitution.

Aufgabe 4 Gegeben ist eine Differentialgleichung mit Anfangswertproblem:

$$(\text{DGL}) \quad \frac{x^3}{y'(x)} = -3y^2(x); \quad (\text{AWP}) \quad y(2) = 3.$$

- (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL.
- (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der DGL zum AWP.

Aufgabe 5 Gegeben ist eine reeller Matrix mit einem freien Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass A_α orthogonal ist.
- (b) Betrachten Sie den Spezialfall $A_{\pi/2}$ und berechnen Sie hierzu sämtliche reelle Eigenwerte.

Aufgabe 6 Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{v} = \vec{b}$ wird gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{v} = \vec{b}$.
- (b) Bestimmen Sie den Rang von A .
- (c) Berechnen Sie $\text{Kern}(A)$.