

# Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.

Studiengang	Semesterzahl

## Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind *erlaubt*: eigene Aufzeichnungen im Umfang von *vier* DIN A4-Blättern, *zweiseitig* beschrieben.
- Weitere Hilfsmittel sind *untersagt*; insbesondere ist die Verwendung von Taschenrechnern, Smartphones oder anderen elektronischen Geräten *untersagt*.
- Schreiben Sie *nicht* mit Rot und *nicht* mit Bleistift.
- Füllen Sie als Erstes den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend 2 Aufgabenblätter. Die Zeit läuft erst, nachdem die Aufgabenblätter verteilt sind.
- Geben Sie die Lösungen zu Aufgabe 1 direkt auf dem ersten Aufgabenblatt an; entsprechende Nebenrechnungen können Sie auf mitgebrachten DIN A4-Blättern durchführen.
- Ansätze, Zeichnungen, Rechenwege und Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 schreiben Sie auf mitgebrachte DIN A4-Blätter. Lösungen ohne Rechenweg sind hier *nicht* ausreichend!
- Bitte notieren Sie oben auf jedem der Blätter Ihren Namen.
- Bitte notieren Sie die jeweiligen Nummern der Aufgaben zu den entsprechenden Lösungswegen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

## Modulprüfung Mathematik 2

### Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Tabelle und vereinfachen Sie soweit wie möglich. Geben Sie die komplexen Zahlen in Normalform an.

$z$	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$	$r =  z $	$\varphi = \arg(z)$
$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}$			1	
	$-2\sqrt{2} - j2\sqrt{2}$			$\frac{3\pi}{4}$

- (b) Gegeben sind Funktionen

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(xyz) \\ \cos(xyz) \\ \ln(xyz) \end{pmatrix};$$

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = -x^2 y^2 z^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ Es gilt  $\text{grad } \vec{F} = \text{div } G$ .  
☐  $\text{grad } F_3$  ist für alle Punkte auf den Koordinatenachsen nicht definiert.  
☐  $\text{rot } \vec{F}$  ist ein Skalarfeld.  
☐  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$  ist eine Funktion, die von genau drei Variablen abhängt.  
☐  $\text{div } G$  nimmt nur negative Werte an.  
☐ Es gilt  $\text{div } \vec{F} = yz \cos(xyz) - zx \sin(xyz) + \frac{1}{z}$ .

- (c) Betrachten Sie das Konvergenzverhalten uneigentlicher Integrale und kreuzen Sie die zutreffenden Antworten an.

- (i)  $\int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + x \right) dx$       ☐ konvergent      ☐ divergent  
 (ii)  $\int_{-1}^1 \left( \frac{1}{x^2} - x \right) dx$       ☐ konvergent      ☐ divergent

**Aufgabe 2** Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$\int_{-(\frac{\pi}{2}+1)}^{-(\frac{\pi}{4}+1)} 2 \sin(x+1) dx$$

**Aufgabe 3** Berechnen Sie das Grundintegral:

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Substitution  $x = \sqrt{t-1}$ .

**Aufgabe 4** Gegeben ist eine Differentialgleichung mit Anfangswertproblem:

$$(DGL) \quad y'(x) = \cos(x) e^{y(x)} \quad (AWP) \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL.
- (b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der DGL zum AWP.

**Aufgabe 5** Gegeben ist eine lineare Abbildung mit entsprechender reeller Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte von  $A$ .
- (b) Berechnen Sie den Eigenraum zu dem *negativen* Eigenwert und geben Sie diesen in beschreibender Form  $V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \dots\}$  an.

**Aufgabe 6** Eine lineare Abbildung wird durch die folgende reelle Matrix  $A$  dargestellt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie ein Erzeugendensystem von  $\text{Bild}(A)$  an.
- (b) Berechnen Sie eine Basis  $B$  von  $\text{Bild}(A)$  und geben Sie diese in aufzählender Form an. Verwenden Sie einen der beiden alternativen Rechenwege:

$$(i) \quad A \xrightarrow{\substack{\text{elementare} \\ \text{Spalten-} \\ \text{Umformungen}}} \tilde{A}$$

$$(ii) \quad A \xrightarrow{T} A^T \xrightarrow{\substack{\text{elementare} \\ \text{Zeilen-} \\ \text{Umformungen}}} \tilde{A}^T \xrightarrow{T} \tilde{A}$$

*Hinweis:* Falls Sie mit Spalten-Umformungen wenig Erfahrung haben, ist der zweite Weg sicherer. Allerdings muss bei diesem Weg zwei Mal transponiert werden.